代数几何课程的又一次习题.

1 第三次作业

习题 1.1. 设 $\phi\colon K^\cdot \to L^\cdot$ 为复形同态. 构造如下复形 $C^\cdot(\phi)$ 为

$$C^i(\phi) = L^i \oplus K^{i+1},$$
$$d^i(x_i, y_{i+1}) = (dx_i + \phi(y_{i+1}), -dy_{i+1}).$$

证明 $dd = 0$, 且有长正合列

$$\cdots \to H^i(K^\cdot) \to H^i(L^\cdot) \to H^i(C^\cdot(\phi)) \to H^{i+1}(K^\cdot) \to \cdots.$$

因此 $C^\cdot(\phi)$ 零调当且仅当 ϕ 为拟同构. 称 $C^\cdot(\phi)$ 为 ϕ 的映射锥. 证明任意复形上 $C^\cdot(\mathrm{id})$ 零伦.

证明.

$$dd(x, y) = (d(dx + \phi(y)) - \phi(dy), ddy) = 0.$$

而自然的嵌入映射 $i\colon L^\cdot \to C^\cdot(\phi)$ 和投影映射 $p\colon C^\cdot(\phi) \to K^\cdot[1]$ 显然都为复形同态, 且有正合列 $0 \to L^\cdot \xrightarrow{i} C^\cdot(\phi) \xrightarrow{p} K^\cdot[1] \to 0$. 此正合列即诱导出上述长正合列.

对于 $C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot})$, 可以构造同伦 $s(x_i, y_{i+1}) = (0, x_i)$. 则

$$(ds + sd)(x, y) = (x, -dx) + (0, dx + y) = (x, y).$$

即 $C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot})$ 上的恒等映射零伦, 亦即 $C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot})$ 零伦. □

习题 1.2. 沿用上一习题的记号. 设有复形正合列

$$0 \to K^\cdot \xrightarrow{\phi} L^\cdot \xrightarrow{\psi} M^\cdot \to 0.$$

定义 $f\colon C^\cdot(\phi) \to M^\cdot$ 为 $f(x_i.y_{i+1}) = \psi(x_i)$. 证明 f 是复形同态并且是拟同构. 进一步还有短正合列

$$0 \to C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot}) \to C^\cdot(\psi) \to M^\cdot \to 0.$$

证明.

$$fd(x, y) = \psi(dx) + \psi\phi(y) = d\psi(x) = df(x, y).$$

因此 f 是复形同态. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i(K^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(L^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(M^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H^{i+1}(K^\cdot) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots. \\
\cdots \arrow[r] & H^i(K^\cdot) \arrow[r] & H^i(L^\cdot) \arrow[r] & H^i(M^\cdot) \arrow[r] & H^{i+1}(K^\cdot) \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

由五引理, f 是拟同构.

定义映射 $g\colon C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot}) \to C^\cdot(\psi)$ 为 $g(x, y) = (\psi(x), y)$, 其显然也是复形同态, 且 $fg = 0$. 由于 f 是拟同构而 $C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot})$ 零伦, 显然有短正合列

$$0 \to C^\cdot(\mathrm{id}_{K^\cdot}) \to C^\cdot(\psi) \to M^\cdot \to 0.$$ □

习题 1.3. 设 A 为交换环. 对任意 A 模 M, 令函子 $\mathrm{Ext}^i_A(M, -)$ 为 $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ 的导出函子. 对 $\operatorname{Spec} A$ 的任意仿射开集 U, 令

$$A_U = \Gamma(U, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}), \quad M_U = \Gamma(U, \tilde{M}), \quad N_U = \Gamma(U, \tilde{N}).$$

设 A Noether 且 M 有限生成. 证明

$$\mathrm{Ext}^i_{A_U}(M_U, N_U) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_U}(\tilde{M}|_U, \tilde{N}|_U).$$

习题 1.4. 设 R 是主理想整环.

1. 对任意 R 有限生成模 M, 任意 R 模 N, 及任意 $i \neq 0, 1$, 都有

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0, \quad \mathrm{Tor}^R_i(M, N) = 0.$$

2. 令 $K^\cdot$ 为有限阶自由 R 模构成的复形. 证明有短正合列

$$0 \to H^n(K^\cdot) \otimes_R N \to H^n(K^\cdot \otimes_R N) \to \mathrm{Tor}_1^R(H^{n+1}(K^\cdot), N) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(H^{-(n-1)}(K^\cdot), N) \to H^n(\mathrm{Hom}_R(K^\cdot, N)) \to \mathrm{Hom}_R(H^{-n}(K^\cdot), N) \to 0.$$

证明.

1. 由主理想整环上的有限生成模分类定理, M 可以表示为两个自由模的商, 即有投射消解 $0 \to R^m \to R^n \to M \to 0$. 以此消解计算 Ext, Tor 即知其在下标超过 1 时消失.

2. 由于命题关于 K 局部, 不妨设 K 上有界. 取 N 的自由消解 $P^\cdot \to N$. 则二重复形 $L^{\cdot\cdot} = K^\cdot \otimes_R P^\cdot$ 满足 $\mathrm{Tot}(L^{\cdot\cdot}) \to (K^\cdot \otimes_R N)$ 拟同构.

   取 $H_{II}H_I L^{\cdot\cdot}$ 即得到谱序列 $E_2^{pq} = \mathrm{Tor}_{-p}^R(H^q(K^\cdot), N) \Rightarrow H^{p+q}(K^\cdot \otimes_R N)$. 由于 $H^q(K^\cdot)$ 有限生成, 由 1 即知此谱序列在第二项即退化, 于是即有

$$0 \to H^n(K^\cdot) \otimes_R N \to H^n(K^\cdot \otimes_R N) \to \mathrm{Tor}_1^R(H^{n+1}(K^\cdot), N) \to 0.$$

   Ext 的证明完全相同. □

习题 1.5. 令 X 为概形, $\mathscr{F}$ 为有限阶局部自由 $\mathscr{O}$ 模, $\mathscr{G}$ 为任意 $\mathscr{O}$ 模. 证明有同构

$$H^i(X, \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

证明. 我们有谱序列 $E_2^{pq} = H^p(X, \mathscr{E}xt^q(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$. 但是局部上, $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_X^k$, 从而对任意 $i > 0$ 有 $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = 0$. 因此这个谱序列立刻退化, 且我们有同构

$$H^i(X, \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$ □

习题 1.6. 证明如下的 de Rham 同构: 令 X 为 (实) 微分流形, $A^n(X)$ 为 X 上的复系数微分 n-形式构成的 $\mathbb{C}$ 线性空间, 也就是 Ω^n_X 的全局截面. 令 $(A^\cdot(X), d)$ 为 X 的 de Rham 复形. 注意 $A^0(X)$ 就是光滑函数空间. 令 $\mathbb{C}$ 为 X 的常值层. 证明 de Rham 同构: 对任意 k, $H^k(X, \mathbb{C}) \cong H^k(A^\cdot(X), d)$.

注. 注意 Ω^n 并不松 (除非 X 是单点). 证明他是零调的. 可能 Ω^n 不是个好记号, 人们一般用 $\mathscr{A}^n(X)$ 表示 n 阶微分形式层. 这里可以使用单位分解证明其零调.

证明. 我们知道, 事实上有层的长正合列 (Poincaré 引理)

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0_X \to \Omega^1_X \to \cdots.$$

这可以通过局部验证来得到. 而 $A^n(X) = \Gamma(X, \Omega^n_X)$. 因此若能证明 Ω^n_X 对 $\Gamma(X, -)$ 零调, 它就是 $\mathbb{C}$ 的零调消解, 因此 $A^\cdot(X)$ 的上同调自然同构于 $H^k(X, \mathbb{C})$.

事实上, 任意 $C^\infty(X)$-模都是软层, 即对任意闭集 Y, 有 $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(Y, \mathscr{F})$ 满射. 这是因为 $\Gamma(Y, \mathscr{F}) = \varinjlim_{U \supset Y} \Gamma(U, \mathscr{F})$. 若 $t \in \Gamma(Y, \mathscr{F})$ 有代表元 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 则任取一个在 Y 上恒 1 且在 U 外恒 0 的函数 f, $f \cdot s$ 即是 t 在全空间上的延拓.

因此 Ω^n_X 是软的. 而仿紧 Hausdorff 空间上软的层总是零调的, 证毕. □

引理. *仿紧 Hausdorff 空间上软的层是零调的.*

证明. 首先, 内射层都是软的. 因为内射层是松的, 而松层是软的 (可以先扩张到足够小的开邻域里, 然后使用松性延拓到全空间).

其次, 设 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 是层正合列, 且 $\mathscr{F}', \mathscr{F}$ 软, 则对应的整体截面也正合, 且 $\mathscr{F}''$ 亦软. 证明与松的情况一致, 只不过扩张时只能扩张出找到的邻域里的一部分: 若对 $t \in \mathscr{F}''$ 找出其扩张 $s_1 \in \mathscr{F}(U_1), s_2 \in \mathscr{F}(U_2)$, 那么可以收缩 U_1, U_2 为 V_1, V_2 使得 $\overline{V_i} \subset U_i$, 并得到 t 在 $V_1 \cup V_2$ 上的扩张.

与松的情形一样, 取内射消解即得到结论. □