这学期开始上盛茂的代数几何课, 于是做一做习题, 毕竟这也是作业.

本节已经做完.

习题 2.1.

1. 令 $X = \mathbb{A}_k^1$ 为无限域 k 上的仿射直线. 令 P, Q 为 X 中两个闭点, $U = X - \{P, Q\}$. 试证明 $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.
2. 考虑更一般的情形, 令 $Y \subseteq X = \mathbb{A}_k^n$ 为一般位置的 $n+1$ 个超平面的并. 令 $U = X - Y$. 试证明 $H^n(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$. 因此 (2.7)[1] 的结论已经最佳.

证明.

1. 设 $Y = \{P, Q\}$, 记 $i : Y \hookrightarrow X$. 令 $\mathbb{Z}_Y = i_*(\mathbb{Z}|_Y)$, 则显然有正合列
$$0 \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_Y \to 0.$$
但 $\mathbb{Z}_Y$ 同构于 Z 在 P 和 Q 上的摩天楼层的直和, 因此 $\Gamma(X, \mathbb{Z}_Y) = \mathbb{Z}^2$. 所以对上述正合列取 $\Gamma(X, -)$ 得
$$0 \to 0 \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{(1,1)} \mathbb{Z}^2 \to H^1(X, \mathbb{Z}_U).$$
由于 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ 不是满射, 即知 $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.
2. 记 $Y_{n,k}$ 为 $\mathbb{A}^{n+1}$ 里 k 个一般位置超平面的并集构成的子空间, $U_{n+1,k}$ 为 $Y_{n,k}$ 在 $\mathbb{A}^{n+1}$ 里的补集. 则有 $\mathbb{A}^{n+1}$ 上的正合列 $0 \to \mathbb{Z}_{U_{n+1,k}} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{Y_{n,k}} \to 0$, 其长正合列便给出 $H^{i+1}(\mathbb{A}^{n+1}, \mathbb{Z}_{U_{n+1,k}}) \cong H^i(\mathbb{A}^{n+1}, \mathbb{Z}_{Y_{n,k}}) \cong H^i(Y_{n,k}, \mathbb{Z})$ $(i > 0)$, 以及 $H^1(A^{n+1}, \mathbb{Z}_{U_{n+1,k}}) = \operatorname{coker}(\mathbb{Z} \to \Gamma(Y_{n,k}, \mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{k-1} & n = 0, \\ 0 & n > 0. \end{cases}$

   固定 n, k. 则 $Y_{n,k}$ 中前 $k-1$ 个超平面的并可以记作 $P \cong Y_{n,k-1}$, 最后一个超平面记作 $Q \cong \mathbb{A}^n$, 则 $Q \setminus P \cong U_{n,k-1}$. 从而又有正合列 $0 \to \mathbb{Z}_{U_{n,k-1}} \to \mathbb{Z}_{Y_{n,k}} \to \mathbb{Z}_{Y_{n,k-1}} \to 0$. 由此又有长正合列
$$\begin{aligned} \cdots \to H^{i-1}(Y_{n,k-1}, \mathbb{Z}_{Y_{n,k-1}}) \to H^i(\mathbb{A}^n, \mathbb{Z}_{U_{n,k-1}}) \to H^i(Y_{n,k}, \mathbb{Z}_{Y_{n,k}}) \\ \to H^i(Y_{n,k-1}, \mathbb{Z}_{Y_{n,k-1}}) \to H^{i+1}(\mathbb{A}^n, \mathbb{Z}_{U_{n,k-1}}) \to \cdots. \end{aligned}$$
   而 $H^i(\mathbb{A}^n, U_{n,k-1}) \cong \begin{cases} H^{i-1}(Y_{n-1,k-1}, \mathbb{Z}_{Y_{n-1,k-1}}) & i > 1, \\ \mathbb{Z}^{k-1} & n = 1, i = 0, \\ 0 & n > 1, i = 0. \end{cases}$

   记 $A_{n,k}^i = \begin{cases} H^i(Y_{n,k}, \mathbb{Z}_{Y_{n,k}}) \otimes \mathbb{Q} & i > 0, \\ 0 & i = 0. \end{cases}$. 上述长正合列通过 $\otimes \mathbb{Q}$ 化为
$$\cdots \to A_{n,k-1}^{i-1} \to A_{n-1,k-1}^{i-1} \to A_{n,k}^i \to A_{n,k-1}^i \to A_{n-1,k-1}^i \to \cdots.$$
   在 $n = 1, i = 1$ 时有特例: $0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^{k-1} \to A_{1,k}^1 \to A_{1,k-1}^1 \to \ldots$.

   我们需要证明 $H^n(\mathbb{A}^n, U_{n,n+1}) \cong A_{n-1,n+1}^{n-1} \neq 0$, 或者说 $A_{n,n+2}^n \neq 0 (n > 0)$.

   为此, 我们证明: 对任意 $n > 0$ 及任意 $1 \leq k \leq n+1$, 有 $A_{n,k}^n = A_{n,k}^{n-1} = 0$; 而对 $k = n+2$, 有 $A_{n,n+2}^n \neq 0$. 对 (n, k) 字典序归纳:

   - 若 $k = 1$, 则 $Y_{n,1} \cong \mathbb{A}^n$, 而 $\mathbb{Q}$ 是其上的松层, 因此其上同调都消失.
   - 若 $n = 1, k = 2$, 则 $0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to A_{1,2}^1 \to 0$. 因此 $A_{1,2}^1 = 0$.
   - 若 $n = 1, k = 3$, 则由正合列 $0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2 \to A_{1,3}^1 \to 0$, 得 $A_{1,3}^1 \cong \mathbb{Q}$.
   - 若 $n > 1, 1 < k \leq n+1$, 则由正合列 $A_{n-1,k-1}^{i-1} \to A_{n,k}^i \to A_{n,k-1}^i$, 代入 $i = n, n-1$ 由归纳假设即证.
   - 若 $n > 1, k = n+2$, 则由正合列 $A_{n,n+1}^{n-1} \to A_{n-1,n+1}^{n-1} \to A_{n,n+2}^n \to A_{n,n+1}^n$ 及归纳假设: $A_{n,n+1}^{n-1} = A_{n,n+1}^n = 0$ 即得 $A_{n,n+2} \cong A_{n-1,n+1}^{n-1} \neq 0$ (亦为归纳假设).

   事实上这说明总有 $A_{n,n+2}^n \cong A_{1,3}^1 \cong \mathbb{Q} \neq 0$. 因此 $H^n(\mathbb{A}^n, \mathbb{Z}_{U_{n,n+1}}) \neq 0$.

   不知道是否有 $H^1(Y_{1,3}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. 这似乎需要显式把 δ 映射算出来. □

习题 2.2. 令 $X = \mathbb{P}_k^1$ 为代数闭域 k 上的射影直线. 试证明第二章习题 1.21d 中的正合列
$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\mathscr{O} \to 0$$
是 $\mathscr{O}$ 的松消解. 从而由此习题 e 得出对任意 $i > 0$ 总有 $H^i(X, \mathscr{O}) = 0$.

[1] Grothendieck 消失定理, n 维 Noether 空间的超过 n 阶上同调消失.

证明. 由于 $\mathscr{K}$ 是 K 常值层, 其显然松. 而由习题 II, 1.21d, $\mathscr{K}/\mathscr{O} \cong \sum_{P\in X} i_P(K/\mathscr{O}_p)$, 也是松层.

由上同调长正合列即知对 $i > 2$ 都有 $H^i(X, \mathscr{O}) = 0$, 而 $H^1(X, \mathscr{O}) = \operatorname{coker}(\Gamma(X, \mathscr{K}) \to \Gamma(X, \mathscr{K}/\mathscr{O}))$. 由 II, 1.21e, $\Gamma(X, \mathscr{K}) \to \Gamma(X, \mathscr{K}/\mathscr{O})$ 满. 因此 $H^1(X, \mathscr{O}) = 0$. □

习题 2.3 (子集支撑的上同调)**.** 令 X 为拓扑空间, Y 为闭子集, $\mathscr{F}$ 为 Abel 群层. 令 $\Gamma_Y(X, \mathscr{F})$ 表示 $\mathscr{F}$ 里支在 Y 上的截面的群.

(1) 证明 $\Gamma_Y(X, -)$ 是 $\mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$ 的左正合函子.

记 $\Gamma_Y(X, -)$ 的右导出函子为 $H^i_Y(X, -)$. 它们是 X 的支在 Y 上的上同调群.

(2) 若 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 是层的正合列, $\mathscr{F}'$ 松, 试证明

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}'') \to 0$$

正合.

(3) 证明若 $\mathscr{F}$ 松, 则对任意 $i > 0$ 有 $H^i_Y(X, \mathscr{F}) = 0$.

(4) 若 $\mathscr{F}$ 松, 试证明

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X - Y, \mathscr{F}) \to 0$$

正合.

(5) 记 $U = X - Y$. 证明对任意 $\mathscr{F}$, 有上同调长正合列

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_Y(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(U, \mathscr{F}|_U) \\ &\to H^1_Y(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(U, \mathscr{F}|_U) \\ &\to H^2_Y(X, \mathscr{F}) \to \cdots. \end{aligned}$$

(6) 切除. 令 V 是 X 的某个包含 Y 的开子集. 则有对 $i, \mathscr{F}$ 自然的同构

$$H^i_Y(X, \mathscr{F}) \cong H^i_Y(V, \mathscr{F}|_V).$$

证明.

(1) $\Gamma_Y(X, -)$ 的函子性显然. 设 $0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \to 0$ 正合. 显然 $\Gamma_Y(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F})$ 是单射.

而若 $s \in \Gamma_Y(X, \mathscr{F})$ 且 $g(s) = 0$, 则由 $\Gamma(X, -)$ 左正合性知存在 $s' \in \Gamma_Y(X, \mathscr{F}')$ 使得 $f(s') = s$. 由于 $\mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ 单, 其在茎上也单. 于是 $s' \in \Gamma_Y(X, \mathscr{F}')$.

综上, $0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}'')$ 正合.

(2) 设 $\mathscr{F}, \mathscr{F}', \mathscr{F}''$ 同上, 设 $s'' \in \Gamma_Y(X, \mathscr{F}'')$. 由于 $\mathscr{F}'$ 松, 存在 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ 使得 $g(s) = s''$.

记 $U = X - Y$. 由于 $\mathscr{F}'$ 松, $0 \to \Gamma(U, \mathscr{F}') \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}'') \to 0$ 正合. 而 $g(s|_U) = g(s)|_U = 0$. 因此存在 $s'_0 \in \Gamma(U, \mathscr{F}')$ 使得 $f(s'_0) = s|_U$. 再次由松性, 存在 $s' \in \Gamma(X, \mathscr{F}')$ 使得 $s|_U = s'_0$. 因此立即知道 $s' - f(s) \in \Gamma_Y(X, \mathscr{F})$ 且其像为 s''. 因此

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}'') \to 0$$

正合.

(3) 取内射层 $\mathscr{I}$ 与单射 $\mathscr{F} \to \mathscr{I}$. 由于内射层松, $\mathscr{I}$ 与 $\mathscr{I}/\mathscr{F}$ 都松. 因此由长正合列, $H^n_Y(X, \mathscr{F}) \cong H^{n-1}_Y(X, \mathscr{I}/\mathscr{F})$ 且 $H^1_Y(X, \mathscr{F}) = 0$. 因此对 n 归纳立知 $H^n_Y(X, \mathscr{F}) = 0$.

(4) 记 $\Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{i} \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{p} \Gamma(X - Y, \mathscr{F}) \to 0$ 按定义, i 是单射, p 是满射, 且 $pi = 0$. 而若 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F}), p(s) = 0$, 则按定义 s 支在 Y 上, 即 $s \in \operatorname{im} i$. 因此

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X - Y, \mathscr{F}) \to 0$$

正合.

(5) 取 $\mathscr{F}$ 的内射消解 $\{\mathscr{I}^\bullet\}$. 由于内射模都松, 由上一个命题得知有链复形的正合列

$$0 \to \Gamma_Y(X, \mathscr{I}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathscr{I}^\bullet) \to \Gamma(U, \mathscr{I}^\bullet|_U) \to 0$$

而 $\mathscr{I}^\bullet|_U$ 也松, 因此也是 $\mathscr{F}|_U$ 的 $\Gamma(U, -)$-零调消解. 取上述链复形短正合列对应的长正合列即为

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_Y(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(U, \mathscr{F}|_U) \\ &\to H^1_Y(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(U, \mathscr{F}|_U) \\ &\to H^2_Y(X, \mathscr{F}) \to \cdots. \end{aligned}$$

(6) 首先, 我们有自然同构 $\Gamma_Y(X,\mathscr{F})\cong\Gamma_Y(V,\mathscr{F}|_V)$, 或 $\Gamma_Y(X,\mathscr{F})\cong\Gamma_Y(V,\mathscr{F})$. 这个同构是显然的: 我们有前者到后者的限制映射, 而其根据层公理显然双射.

现在设 $\mathscr{I}^\bullet$ 是 $\mathscr{F}$ 的内射消解, 则 $\Gamma_Y(X,\mathscr{I}^\bullet)\cong\Gamma_Y(V,\mathscr{I}^\bullet|_V)$. 由于 $\mathscr{I}^\bullet|_V$ 也是 $\mathscr{F}|_V$ 的松层消解, 其上同调也给出 $H^i_Y(V,\mathscr{F}|_V)$. 因此上述自然同构就给出了上同调的自然同构. □

习题 2.4 (Mayer–Vietoris 正合列)**.** 令 Y_1,Y_2 为 X 的两个闭集. 则有支集上同调的长正合列

$$\begin{aligned}\cdots\to H^i_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})&\to H^i_{Y_1}(X,\mathscr{F})\oplus H^i_{Y_2}(X,\mathscr{F})\to H^i_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathscr{F})\\ &\to H^{i+1}_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})\to\cdots.\end{aligned}$$

证明. 记 i_1,i_2 为 $\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})$ 到 $\Gamma_{Y_1}(X,\mathscr{F})$ 或 $\Gamma_{Y_2}(X,\mathscr{F})$ 的自然嵌入, j_1,j_2 为两者到 $\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathscr{F})$ 的自然嵌入. 设 $\mathscr{F}$ 松, 下面证明

$$0\to\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})\xrightarrow{i_1+i_2}\Gamma_{Y_1}(X,\mathscr{F})\oplus\Gamma_{Y_2}(X,\mathscr{F})\xrightarrow{j_1-j_2}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathscr{F})\to 0$$

正合.

- 显然 i_1+i_2 是单射, 且 $(j_1-j_2)(i_1+i_2)=0$. 且若 $(s_1,s_2)\in\Gamma_{Y_1}(X,\mathscr{F})\oplus\Gamma_{Y_2}(X,\mathscr{F})$ 使得 $j_1(s_1)-j_2(s_2)=0$, 即 $s_1-s_2=0$, 必有 $s_1=s_2\in\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})$, 即 $(s_1,s_2)\in\operatorname{im}(i_1+i_2)$. 因此 $\ker(j_1-j_2)=\operatorname{im}(i_1+i_2)$.
- 设 $\mathscr{F}$ 松. 记 $U_1=X-Y_1,U_2=X-Y_2$. 若 $s\in\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathscr{F})$, 令 $t\in\Gamma(U_1\cup U_2,\mathscr{F})$ 为 $s|_{U_1}$ 和 $0|_{U_2}$ 的粘接. 由于 $\mathscr{F}$ 松, 存在 $s_2\in\Gamma(X,\mathscr{F})$ 使得 $s_2|_{U_1\cup U_2}=t$.

  由于 $s_2|_{U_2}=0, s_1|_{U_1}=s|_{U_1}$, 即得 $s_2\in\Gamma_{Y_2}(X,\mathscr{F}), s-s_2\in\Gamma_{Y_1}(X,\mathscr{F})$. 因此 j_1-j_2 为满射.

现在设 $\mathscr{F}$ 为任意层. 取 $\mathscr{F}$ 的内射消解 $\mathscr{I}^\bullet$, 根据上述结论有正合列

$$0\to\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(\mathscr{I}^\bullet,\mathscr{F})\xrightarrow{i_1+i_2}\Gamma_{Y_1}(\mathscr{I}^\bullet,\mathscr{F})\oplus\Gamma_{Y_2}(\mathscr{I}^\bullet,\mathscr{F})\xrightarrow{j_1-j_2}\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(\mathscr{I}^\bullet,\mathscr{F})\to 0$$

取其上同调长正合列

$$\begin{aligned}\cdots\to H^i_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})&\to H^i_{Y_1}(X,\mathscr{F})\oplus H^i_{Y_2}(X,\mathscr{F})\to H^i_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathscr{F})\\ &\to H^{i+1}_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathscr{F})\to\cdots.\end{aligned}$$

□

习题 2.5. 设 X 是 Zariski 空间 (II, 习题 3.17)[2]. 令 $P\in X$ 为闭点, X_P 为所有满足 $P\in\{Q\}^-$ 的点 Q 构成的子集. 称 X_P 为 X 在 P 处的*局部空间*, 配备诱导子空间拓扑. 令 $j\colon X_P\to X$ 为包含映射; 对 X 上的任意层 $\mathscr{F}$, 记 $\mathscr{F}_P=j^*\mathscr{F}$. 证明对任意 $i,\mathscr{F}$ 都有

$$H^i_P(X,\mathscr{F})\cong H^i_P(X_P,\mathscr{F}_P).$$

下面的证明中需要这个引理:

引理. *设 X 为 Zariski 拓扑, Y 为任意在一般化下封闭的子集, $j\colon Y\to X$ 为嵌入映射. 设 $\mathscr{F}$ 为 X 上的层, $\mathscr{F}_Y=j^*Y$. 则对 Y 中任意开集 U, 有*

$$\mathscr{F}_Y(U)\cong\varinjlim_{U\subset\tilde U}\mathscr{F}(\tilde U),$$

其中 $\tilde U$ 遍历 X 的满足条件的开集. 换句话说, $\mathscr{F}$ 作为预层在 Y 上的限制已经是层.

证明. 由于 $\mathscr{F}_Y$ 事实上定义为 $U\mapsto\varinjlim_{U\subset\tilde U}\mathscr{F}(\tilde U)$ 的层化, 立刻有 $\varinjlim_{U\subset\tilde U}\mathscr{F}(\tilde U)$ 到 $\mathscr{F}_Y(U)$ 的映射. 我们记此正向极限为 $\mathscr{F}'_Y(U)$, 此映射为 $\varphi\colon\mathscr{F}'_Y(U)\to\mathscr{F}_Y(U)$.

由于正向极限正合, $\mathscr{F}'_Y(U)\to\prod_{x\in U}\mathscr{F}_x$ 是单射. 因此易知 φ 为单射.

为证明 φ 是满射, 也就是证明 $\mathscr{F}_Y(U)$ 中任意截面 s 都是 U 附近的某个开集 $\tilde U$ 的某个截面的限制. 按定义, 存在 Y 的一族开覆盖 U_i 使得 $s|_{U_i}\in\mathscr{F}'_Y(U_i)$, 即存在 X 中开集 $\tilde U_i\supset U_i$ 以及 $s_i\in\mathscr{F}(\tilde U_i)$ 使得 $s_i|_{U_i}=s|_{U_i}$[3];

由于 Y 拟紧, 可以设 U_i 是有限开覆盖. 利用归纳法, 又可以规约到只有两个开集的情况. 此时由于 $s_1|_{U_1\cap U_2}=s_2|_{U_1\cap U_2}$, 存在 X 中的开集 V, 使得 $U_1\cap U_2\subset V\subset\tilde U_1\cap\tilde U_2$, 且 $s_1|_V=s_2|_V$. 记 $N=(\tilde U_1\cap\tilde U_2)\setminus V$. 我们证明: $\overline{N}\cap Y=\varnothing$. 若不然, 由于 Y 对一般化封闭, 有 $\overline{N}$ 中的某个不可约分支的一般点 ξ 属于 Y. 因此 $\xi\in U_1\cap U_2\subset V$, 从而 $\xi\notin N$, 因而 $N\cap\{\xi\}^-=\varnothing$, 矛盾.

从而, 若把 U_1,U_2,V 分别改为 $U_1\setminus\overline{N},U_2\setminus\overline{N},V\setminus\overline{N}$, 就有 $V=U_1\cap U_2$. 因此可从 s_1,s_2 拼出 $s_0\in\mathscr{F}(\tilde U_1\cup\tilde U_2)$ 使得 $s_0|_U=s$. 也就是说 φ 是满射. □

[2]每个非空不可约闭集都有一一般点的 Noether 空间.

[3]这里混淆了记号, 事实上应该是 s_i 在 $\mathscr{F}'_Y(U_i)$ 中的像是 $s|_{U_i}$.

习题 2.5 的证明. 由于 Zariski 空间的开集对一般化封闭, 任意包含 P 的开集都包含 X_P, 且若 $Q \notin X_P$, 有 $P \in (X \setminus \{Q\}^-)$. 所以 $X_P = \bigcap_{P\in U\subset X} U$, 其中 U 取遍包含 P 的开集.

按习题 2.3 (6), 对任意包含 P 的开集 V, 有 $H^i_P(X,\mathscr{F}) \cong H^i_P(X_P,\mathscr{F}_P)$. 若 $V \supset W$, 取 2.3 (5) 的长正合列, 有映射

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i_P(V,\mathscr{F}|_V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^i(V,\mathscr{F}|_V) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(V\setminus\{P\},\mathscr{F}|_{V\setminus\{P\}}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^i_P(W,\mathscr{F}|_W) \arrow[r] & H^i(W,\mathscr{F}|_W) \arrow[r] & H^i(W\setminus\{P\},\mathscr{F}|_{W\setminus\{P\}}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

取正向极限即得正合列

$$\cdots \to \varinjlim_{P\in V} H^i_P(V,\mathscr{F}|_V) \to \varinjlim_{P\in V} H^i(V,\mathscr{F}|_V) \to \varinjlim_{P\in V} H^i(V\setminus\{P\},\mathscr{F}|_{V\setminus\{P\}}) \to \cdots.$$

即

$$\cdots \to H^i_P(X,\mathscr{F}) \to \varinjlim_{P\in V} H^i(V,\mathscr{F}) \to \varinjlim_{P\in V} H^i(V\setminus\{P\},\mathscr{F}) \to \cdots.$$

此外, 在 X_P 上还有长正合列

$$\cdots \to H^i_P(X_P,\mathscr{F}_P) \to H^i(X_P,\mathscr{F}_P) \to H^i(X_P\setminus\{P\},\mathscr{F}_P) \to \cdots.$$

因此只需证明有自然同构 $H^i(X_P,\mathscr{F}_P) \cong \varinjlim_{P\in V} H^i(V,\mathscr{F})$ 及 $H^i(X_P\setminus\{P\},\mathscr{F}_P) \cong \varinjlim_{P\in V} H^i(V\setminus\{P\},\mathscr{F})$.

上面的引理事实上证明了在 $i=0$ 时,

$$\Gamma(X_P,\mathscr{F}_P) \cong \varinjlim_{P\in V} \Gamma(V,\mathscr{F})$$
$$\Gamma(X_P\setminus\{P\},\mathscr{F}_P) \cong \varinjlim_{P\in V} \Gamma(V\setminus\{P\},\mathscr{F}).$$

并且引理还有显然的推论: 若 $\mathscr{F}$ 松, 则 $\mathscr{F}_P$ 松 (因为 $\varinjlim$ 的正合性). 因此立知: $H^i(X_P,-_P), H^i(X_P\setminus\{P\},\mathscr{F}_P)$ 都是可擦函子 (因为松层对于它们是零调对象). 而 $\varinjlim H^i(V,-), \varinjlim H^i(V\setminus\{P\},-)$ 显然也是可擦函子. 因此由 δ 函子的万有性即得正合列的自然态射

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i_P(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{P\in V} H^i(V,\mathscr{F}|_V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \varinjlim_{P\in V} H^i(V\setminus\{P\},\mathscr{F}|_{V\setminus\{P\}}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^i_P(X_P,\mathscr{F}_P) \arrow[r] & H^i(X_P,\mathscr{F}_P) \arrow[r] & H^i(X_P\setminus\{P\},\mathscr{F}_P|_{X_P\setminus\{P\}}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由五引理, 即知 $H^i_P(X,\mathscr{F}) \to H^i_P(X_P,\mathscr{F}_P)$ 亦为同构. □

习题 2.6. 令 X 为 Noether 拓扑空间, $\{\mathscr{I}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为 X 上内射层的有向系统. 证明 $\varinjlim \mathscr{I}_\alpha$ 亦内射. [*提示:* 首先证明层 $\mathscr{I}$ 内射当且仅当对 X 的任意开子集 U, $\mathbb{Z}_U$ 的任意子层 $\mathscr{R}$, 以及任意态射 $f\colon \mathscr{R}\to\mathscr{I}$, 其都可以扩张成 $\mathbb{Z}_U \to \mathscr{I}$ 的映射. 其次, 证明这样的 $\mathscr{R}$ 都有限生成, 因此 $\mathscr{R}\to\varinjlim\mathscr{I}_\alpha$ 穿过某个 $\mathscr{I}_\alpha$.]

证明. 我们按照提示顺序证明. 首先证明层 $\mathscr{I}$ 内射当且仅当对 X 的任意开子集 U, $\mathbb{Z}_U$ 的任意子层 $\mathscr{R}$, 以及任意态射 $f\colon\mathscr{R}\to\mathscr{I}$, 其都可以扩张成 $\mathbb{Z}_U\to\mathscr{I}$ 的映射.

必要性显然. 考虑充分性. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的层, $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$ 是其子层, $g\colon\mathscr{G}\to\mathscr{I}$ 是任意态射. 我们希望证明 g 可以延拓为 $\mathscr{F}\to\mathscr{I}$. 记 $\Sigma = \{(\mathscr{H},h) \mid \mathscr{G}\subseteq\mathscr{H}\subseteq\mathscr{F}, h\colon\mathscr{H}\to\mathscr{I}, h|_{\mathscr{G}} = g\}$, 其上给显然的偏序. 由 Zorn 引理, Σ 中有极大元 $(\mathscr{H},h)$.

若 $\mathscr{H}\neq\mathscr{F}$, 取开集 U 以及 $s\in\mathscr{F}(U)\setminus\mathscr{H}(U)$. 记映射 $\varphi\colon\mathbb{Z}_U\to\mathscr{F}, \varphi(t_V) = t_V s|_V$. 记 $\mathscr{R} = \varphi^{-1}(\mathscr{H})$. 由假设, 映射 $h\circ\varphi\colon\mathscr{R}\to\mathscr{I}$ 可以延拓为 $\mathbb{Z}_U\to\mathscr{I}$. 此映射和 $h\colon\mathscr{H}\to\mathscr{I}$ 拼接为 $(\mathscr{H}+\mathbb{Z}_U s)\to\mathscr{I}$, 与 $(\mathscr{H},h)$ 极大性矛盾. 因此只可能 $\mathscr{H}=\mathscr{F}$. 这里 $\mathscr{H}+\mathbb{Z}_U s$ 定义为 $\mathscr{H}\oplus\mathbb{Z}_U\to\mathscr{F}$ 的像.

Hartshorne 声称 $\mathscr{R}$ 应该是有限生成的. 我想他大约想表达 $\mathscr{R}$ 是 Noether 的, 即其子对象升链总稳定. 换句话说其希望说明 $\mathbb{Z}_U$ 是 Noether 的.

接下来我们证明 $\mathbb{Z}_U$ 是 Abel 群层里的 Noether 对象, 即其子对象升链总稳定. 设 $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{Z}_U$ 是 $\mathbb{Z}_U$ 的子对象的升链. 设 U 的不可约分支为 $U_1,\dots,U_n$, 则只需证明每个 $\mathscr{F}_k|_{U_i}$ 稳定. 所以不妨设 U 不可约.

设 V_k 为最大的使得 $\mathscr{F}_k(V)\neq 0$ 的开集 (若 $\mathscr{F}_k(V) = r\mathbb{Z}, \mathscr{F}_k(V') = s\mathbb{Z}$, 显然有 $\mathscr{F}_k(V\cup V') = \operatorname{lcm}(r,s)\mathbb{Z}$. 因此 V_k 良定). 则 V_k 是开集升链, 从而稳定. 设其稳定到 V. 则 $\mathscr{F}_k(V)$ 是 $\mathbb{Z}$ 的子模升链, 其必定稳定. 设其稳定到 $m\mathbb{Z}$. 按定义, $m>0$. 对 m 的任意因子 d, 记 $C_k(d)$ 为 d 在 $\mathbb{Z}_U/\mathscr{F}_k$ 中的支集. 则 $C_k(d)$ 构成 (关于 k 的) 闭集降链. 因此每个都稳定. 也就是说, 在 k 充分大的时候, $\mathscr{F}_k\to\mathscr{F}_{k+1}$ 在每个茎上都是同构. 这也就是说 $\mathscr{F}_k$ 稳定.

接下来, 设 $\mathscr{I}_\alpha$ 为内射层的有向系统. 设 U 是开集, $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{Z}_U$ 的子层, $f\colon\mathscr{R}\to\varinjlim\mathscr{I}_\alpha$. 由于 $\mathbb{Z}_U$ 是 Noether 对象, $f^{-1}(\mathscr{I}_\alpha)$ 稳定. 也就是说存在 α 使得 f 穿过 $\mathscr{I}_\alpha$. 因此由 $\mathscr{I}_\alpha$ 的内射性, f 可以延拓为 $\mathbb{Z}_U\to\mathscr{I}_\alpha\to\varinjlim\mathscr{I}_\alpha$. 综上, $\varinjlim\mathscr{I}_\alpha$ 内射. □

习题 2.7. 令 $\mathbf{S}^1$ 为圆, 配备通常的拓扑. 令 $\mathbb{Z}$ 为其上的常值层.

(1) 证明 $H^1(\mathbf{S}^1,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ (用我们定义的 (层) 上同调).

(2) 现在令 $\mathscr{R}$ 为 $\mathbf{S}^1$ 上的连续实值函数层. 证明 $H^1(\mathbf{S}^1,\mathscr{R})=0$.

证明. 此处参考 MSE 问题, 感谢名为 Daniel Schpler 的 MSE 用户.

我们先处理 $\mathbb{R}$ (配备通常的拓扑) 上的上同调. 定义 $\mathbb{R}$ 上的层 $\mathscr{F}$ 是区间松的当且仅当对任意两个开区间 $I\supset J$, 都有 $\mathscr{F}(I)\to\mathscr{F}(J)$ 满. 下面我们证明区间松的层都是 $\Gamma(\mathbb{R},-)$ 零调对象.

1. 若 $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ 是 $\mathbb{R}$ 上层的正合列, 且 $\mathscr{F}'$ 区间松, 则
$$0\to\Gamma(U,\mathscr{F}')\to\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(U,\mathscr{F}'')\to 0$$
对所有开集 U 正合. 由于开集总是开区间的不交并, 只需对 U 为开区间证明. 只需证明 $\Gamma(\mathbb{R},\mathscr{F})\to\Gamma(\mathbb{R},\mathscr{F}'')$ 满. 若 $t\in\Gamma(\mathbb{R},\mathscr{F}'')$, 设 (I,s) 为其极大的区间上的提升. 在 I 的端点附近取区间 J 及 $s'\in\Gamma(J,\mathscr{F})$. 取 $r\in\Gamma(I,\mathscr{F})$ 使得 $r|_{I\cap J}$ 映射到 $s-s'$ (这由区间松得到), 则 $s-r$ 和 s' 可拼成 $I\cup J$ 上 t 的提升.

2. 若 $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ 是 $\mathbb{R}$ 上层的正合列, 且 $\mathscr{F}',\mathscr{F}$ 区间松, 则 $\mathscr{F}''$ 也区间松. 由上一条显然.

3. 内射层都区间松. 因为内射层都松, 所以也区间松.

综上即可证明 $H^i(\mathbb{R},\mathscr{F})=0$ 对任意 i 和任意区间松 $\mathscr{F}$ 成立.

接下来证明原问题.

(1) 取 I_u,I_d 为 $\mathbf{S}^1$ 的上下半圆 (闭区间), 其交集为 $\{P,Q\}$. 记 $\mathbb{Z}_u,\mathbb{Z}_d$ 为 $\mathbb{Z}$ 在 I_u,I_d 上的限制 (并在 I_u,I_d 外用 0 延拓), 则显然有正合列
$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\mathbb{Z}_u\oplus\mathbb{Z}_d\xrightarrow{\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}}\mathbb{Z}_P\oplus\mathbb{Z}_Q\to 0.$$
正合性可在茎上逐点验证. 取其上同调长正合列得
$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\mathbb{Z}^2\xrightarrow{\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}}\mathbb{Z}^2\to H^1(\mathbf{S}^1,\mathbb{Z})\to H^1(I_u,\mathbb{Z}_u)\oplus H^1(I_d,\mathbb{Z}_d)\to 0.$$
而 I_u 可以同构于 $\mathbb{R}$ 的闭子区间 $[0,1]$. 将 Z_u 以 0 延拓到 $\mathbb{R}$ 上后, 显然其区间松. 因此 $H^1(I_u,\mathbb{Z}_u)=0$. 同理, $H^1(I_d,\mathbb{Z}_d)=0$. 因此即可得出 $H^1(\mathbf{S}^1,\mathbb{Z})\cong\operatorname{coker}\left(\left[\begin{smallmatrix}1&1\\-1&-1\end{smallmatrix}\right]\right)\cong\mathbb{Z}$.

(2) 同上取 $\mathscr{R}_u,\mathscr{R}_d$, 记 $C(U,\mathbb{R})$ 为 U 上的连续函数族, 依然有长正合列
$$0\to C(\mathbf{S}^1,\mathbb{R})\to C(I_u,\mathbb{R})\oplus C(I_d,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2\to H^1(\mathbf{S}^1,\mathscr{R})\to H^1(I_u,\mathscr{R}_u)\oplus H^1(I_d,\mathscr{R}_d)\to 0.$$
同理, $\mathscr{R}_{u,d}$ 以 0 延拓到 $\mathbb{R}$ 上后区间松, 因此上同调消失. 而 $C(I_u,\mathbb{R})\oplus C(I_d,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$ 是满射. 因此 $H^1(\mathbf{S}^1,\mathscr{R})=0$. □